

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПРИКАЗ

29.09.2025

г. Донецк

~ 244/05

Об утверждении дополнительной  
общеобразовательной общеразвивающей  
программы естественно-научной направленности  
«Математика для поступающих в вузы»

С целью обеспечения эффективного осуществления ДонГУ образовательной деятельности по одному из основных видов деятельности – дополнительным общеобразовательным общеразвивающим программам, во исполнение решения Ученого совета ДонГУ от 26.09. 2025 (протокол № 11) об утверждении дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы естественно-научной направленности «Математика для поступающих в вузы»

ПРИКАЗЫВАЮ:

1. Утвердить и ввести в действие дополнительную общеобразовательную общеразвивающую программу естественно-научной направленности «Математика для поступающих в вузы» (Приложение).

2. Директору учебно-практического вычислительного центра Кожемякину Ю. А. обеспечить размещение настоящего приказа и прилагаемой к нему дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы естественно-научной направленности «Математика для поступающих в вузы» на официальном сайте ДонГУ.

3. Контроль за исполнением настоящего приказа возложить на первого проректора Дубровину В. А.

Ректор

С. В. Беспалова

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПРИНЯТА

ученым советом ДонГУ  
протокол от 26. 09.2025 № 11

УТВЕРЖДЕНА

приказом ректора ДонГУ  
от 29. 09.2025 № 244/05

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ  
ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ ПРОГРАММА  
естественно-научной направленности  
«МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ»

Программа разработана  
и реализуется факультетом  
математики и информационных  
технологий



## I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Программа разработана в соответствии и с учетом требований следующих нормативных правовых актов, регламентирующих организацию и осуществление образовательной деятельности:

1. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».
2. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 27.07.2022 № 629 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам».
3. Санитарные правила СП 2.4.3648-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи», утвержденные постановлением Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 28.09.2020 № 28 (зарегистрировано Министерством юстиции Российской Федерации 18.12.2020, регистрационный № 61573).
4. Профессиональный стандарт «Педагог дополнительного образования детей и взрослых», утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 22.09.2021 № 652н.

Образовательная деятельность по программе направлена на:

- формирование и развитие творческих способностей обучающихся;
- удовлетворение индивидуальных потребностей обучающихся в интеллектуальном развитии;
- профессиональную ориентацию обучающихся;
- выявление, развитие и поддержку обучающихся, проявивших выдающиеся способности.

В целом программа имеет е с т е с т в е н н о - н а у ч н у ю (математическую) направленность. Содержание программы определяется приведенным далее учебно-тематическим планом. Программа может быть реализована в одном из трех вариантов. Характеристики каждого из них приведены ниже.

### Вариант 1

Срок обучения (месяцы)	8
Трудоемкость освоения обучающимся (академические часы)	264
Учебная нагрузка преподавателя (академические часы)	200
Учебные занятия (академические часы)	128
Консультирование обучающихся преподавателем (академические часы)	64
Подготовка и проведение итоговой аттестации (академические часы)	8
Самостоятельная работа обучающихся (академические часы)	64



### Вариант 2

Срок обучения (месяцы)	6
Трудоемкость освоения обучающимся (академические часы)	200
Учебная нагрузка преподавателя (академические часы)	152
Учебные занятия (академические часы)	96
Консультирование обучающихся преподавателем (академические часы)	48
Подготовка и проведение итоговой аттестации (академические часы)	8
Самостоятельная работа обучающихся (академические часы)	48

### Вариант 3

Срок обучения (месяцы)	3
Трудоемкость освоения обучающимся (академические часы)	104
Учебная нагрузка преподавателя (академические часы)	80
Учебные занятия (академические часы)	48
Консультирование обучающихся преподавателем (академические часы)	24
Подготовка и проведение итоговой аттестации (академические часы)	8
Самостоятельная работа обучающихся (академические часы)	24

Программа адресована в первую очередь лицам, завершающим обучение по основным общеобразовательным программам среднего общего образования (учащимся 11-х классов общеобразовательных организаций). К обучению по программе допускаются лица других категорий без ограничений по возрасту, проявившие интерес к освоению содержания программы. Вступительные испытания для допуска к обучению по программе не предусматриваются.

Педагогическая деятельность по реализации программы осуществляется преподавателем – лицом, имеющим высшее образование по специальности (направлению подготовки), соответствующей (соответствующему) направленности программы, и отвечающим требованиям профессионального стандарта «Педагог дополнительного образования детей и взрослых». Для работы в качестве преподавателя может быть привлечено лицо, обучающееся по образовательной программе высшего образования по специальности (направлению подготовки), соответствующей (соответствующему) направленности программы, и успешно прошедшее промежуточную аттестацию не менее чем за два года обучения.

Программа может реализовываться в течение всего календарного года, включая каникулярное время. Реализация программы осуществляется в соответствии с расписанием занятий группы обучающихся, составляемым для создания наиболее благоприятного режима труда и отдыха обучающихся с учетом пожеланий обучающихся, родителей (законных представителей) несовершеннолетних обучающихся и возрастных особенностей обучающихся.

Текущая и промежуточная аттестация обучающихся программой не предусматриваются. Обучающимся, успешно прошедшим итоговую аттестацию, выдается



с е р т и ф и к а т установленного Донецким государственным университетом образца, подтверждающий успешное освоение программы.

Ц е л ь ю реализации программы является развитие, обобщение и систематизация знаний и умений обучающихся, полученных ими при освоении основной образовательной программы среднего общего образования по м а т е м а т и к е.

Комплекс з а д а ч реализации программы определяется тем, что в результате ее успешного освоения обучающийся должен быть способен (на уровне, предусмотренном основной образовательной программой среднего общего образования):

- использовать математические знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- производить математические вычисления и выполнять формальные преобразования;
- решать уравнения и неравенства;
- выполнять действия по анализу функций;
- выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами;
- строить и исследовать математические модели.

Л и ч н о с т н ы е результаты освоения программы обучающимися должны отражать готовность и способность обучающихся руководствоваться сформированной внутренней позицией, системой ценностных ориентаций, позитивных внутренних убеждений, соответствующих традиционным социальным ценностям, расширение жизненного опыта и опыта общественно-значимой и лично-значимой деятельности. Результаты освоения программы обучающимися должны быть связаны в том числе с их трудовым воспитанием (развитие интереса к различным сферам профессиональной деятельности), а также с принятием обучающимися ценности научного познания (сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики).

Нормативно программа реализуется в о ч н о й форме. Допускается реализация программы с применением элементов электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, предполагающих предоставление обучающимся возможности удаленно-синхронного участия в занятиях. Ответственность за создание соответствующих условий в техническом и организационном плане со стороны Донецкого государственного университета возлагается на преподавателя.

## II. УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Занятия с группой обучающихся проводятся от одного раза до трех раз в неделю (наиболее приемлемый день недели – суббота). Распределение бюджета времени освоения программы по ее содержательным элементам выполняется преподавателем и может подвергаться динамическому варьированию с целью наиболее полного удовлетворения образовательных потребностей и интересов обучающихся.



## Т е м а 1

### Ч и с л а и в ы ч и с л е н и я

- 1.1. Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел.
- 1.2. Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби.
- 1.3. Арифметический корень натуральной степени. Действия с арифметическими корнями натуральной степени.
- 1.4. Степень с целым показателем. Степень с рациональным показателем. Свойства степени.
- 1.5. Синус, косинус, тангенс и котангенс действительного аргумента. Арксинус, арккосинус, арктангенс.
- 1.6. Логарифм действительного числа. Десятичные и натуральные логарифмы.
- 1.7. Действительные числа. Арифметические операции с действительными числами. Приближенные вычисления. Правила округления. Прикидка и оценка результатов вычислений.
- 1.8. Преобразование выражений.
- 1.9. Понятие о комплексных числах.

## Т е м а 2

### У р а в н е н и я и н е р а в е н с т в а

- 2.1. Целые и дробно-рациональные уравнения.
- 2.2. Иррациональные уравнения.
- 2.3. Тригонометрические уравнения.
- 2.4. Показательные и логарифмические уравнения.
- 2.5. Целые и дробно-рациональные неравенства.
- 2.6. Иррациональные неравенства.
- 2.7. Показательные и логарифмические неравенства.
- 2.8. Тригонометрические неравенства.
- 2.9. Системы и совокупности уравнений и неравенств.
- 2.10. Уравнения, неравенства и системы с параметрами.
- 2.11. Системы линейных алгебраических уравнений. Квадратные матрицы и их определители (второго и третьего порядков). Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

## Т е м а 3

### Ф у н к ц и и и г р а ф и к и

- 3.1. Функция, способы задания функции. График функции. Взаимно обратные функции. Четные и нечетные функции. Периодические функции.
- 3.2. Область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Промежутки монотонности функции. Максимумы и минимумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.



- 3.3. Степенная функция с натуральным и целым показателем. Ее свойства и график. Свойства и график корня натуральной степени.
- 3.4. Тригонометрические функции, их свойства и графики. Обратные тригонометрические функции.
- 3.5. Показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики.
- 3.6. Точки разрыва. Асимптоты графиков функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
- 3.7. Последовательности, способы задания последовательностей.
- 3.8. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула сложных процентов.

#### Тема 4

##### Начала математического анализа

- 4.1. Производная функции. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования.
- 4.2. Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
- 4.3. Первообразная. Интеграл.

#### Тема 5

##### Множества и логика

- 5.1. Множество, операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.
- 5.2. Логика.

#### Тема 6

##### Вероятность и статистика

- 6.1. Описательная статистика.
- 6.2. Комбинаторика.
- 6.3. Вероятность.

#### Тема 7

##### Геометрия

- 7.1. Фигуры на плоскости.
- 7.2. Прямые и плоскости в пространстве.
- 7.3. Многогранники.
- 7.4. Тела и поверхности вращения.
- 7.5. Координаты и векторы.

### III. МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОГРАММЫ

При проведении занятий с обучающимися преподаватель должен учитывать интересы обучающихся, их интеллектуальные и физические возможности. Занятия должны приносить обучающимся радость, пробуждать в них желание изучать



математику, развивать творческие способности. Одной из важнейших воспитательных функций программы является профессиональная ориентация обучающихся, пропаганда выбора ими для дальнейшего обучения направлений подготовки, специальностей высшего образования, предполагающих интенсивное формирование, развитие и использование математических знаний и математической культуры личности (в первую очередь – математических, естественно-научных и инженерных направлений подготовки, специальностей).

Программа предполагает использование преподавателем разнообразных методов обучения: теоретических (изложение учебного материала, беседа, показ способов решения учебных задач), практических (выполнение упражнений, отработка типовых способов осуществления учебной деятельности, тренинги), визуальных (демонстрация и использование статических, динамических и интерактивных визуализаций математических объектов и процессов, демонстрация и рекомендация к самостоятельному просмотру фотографий, слайд-презентаций, фрагментов мультимедийных, документальных, художественных фильмов, развивающих интерес к изучению математики, углубляющих, расширяющих, обобщающих и систематизирующих элементы математических представлений и математической культуры обучающихся), игровых (использование элементов игры при проведении занятий), исследовательских (частично-поисковая и доступная на характеризующем обучающихся уровне развитости интеллектуальных способностей посильная для них поисковая, исследовательская деятельность) и других.

Преподавателю при проведении занятий и при организации самостоятельной работы обучающихся рекомендуется применять элементы прогрессивных технологий обучения: технологии личностно-ориентированного и развивающего обучения, технологии коллективной творческой деятельности и технологии взаимообучения, эвристические технологии и технологии проблемного обучения, технологии индивидуализации и персонализации обучения, современные информационно-коммуникационные образовательные технологии. При выборе используемых в образовательном процессе компьютерных средств и программного обеспечения должны соблюдаться требования принципа стремления к цифровому и алгоритмическому суверенитету государства.

Занятия с обучающимися проводятся в помещениях учебных корпусов Донецкого государственного университета, соответствующих требованиям законодательства Российской Федерации в области санитарно-эпидемиологического благополучия населения. На первом занятии преподавателем с группой обучающихся проводится инструктаж по безопасности жизнедеятельности, что фиксируется в соответствующем журнале. С родителями (законными представителями) несовершеннолетних обучающихся преподавателем о вопросах безопасности жизнедеятельности обучающихся проводится беседа.

Использование при реализации программы методов и средств обучения и воспитания, образовательных технологий, наносящих вред физическому или психическому здоровью обучающихся, запрещается.



#### IV. ФОРМА ПОДВЕДЕНИЯ ИТОГОВ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

Подведение итогов освоения программы производится в форме **и т о г о в о й а т т е с т а ц и и** обучающихся, реализуемой путем выполнения обучающимися заданий итоговой контрольной работы и оценивания преподавателем результатов выполнения заданий по пятибальной шкале («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно») в соответствии с заранее установленными критериями. Участие обучающихся в итоговой аттестации является необязательным (добровольным). Обучающимся, успешно прошедшим итоговую аттестацию («отлично», «хорошо», «удовлетворительно»), выдается сертификат об успешном освоении программы установленного Донецким государственным университетом образца.

Итоговая контрольная работа состоит из двух частей, содержащих 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности. На проведение занятий для непосредственной подготовки к выполнению итоговой контрольной работы отводится 4 академических часа. На выполнение контрольной работы отводится 4 академических часа. Примеры заданий итоговой контрольной работы и критериев оценивания приведены ниже.

##### Ч а с т ь 1

1. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность (рис. 1). Угол  $ABC$  равен  $103^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $42^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ .  
Ответ дайте в градусах: \_\_\_\_\_.

2. Даны векторы  $\mathbf{a}(25;0)$  и  $\mathbf{b}(1;-5)$ . Вычислите  $|\mathbf{a}-4\mathbf{b}|$ . Ваш ответ: \_\_\_\_\_.

3. Первая цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая кружка в полтора раза шире первой. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой. Ваш ответ: \_\_\_\_\_.

4. В группе туристов — 20 человек, один из них — Дмитрий. С помощью жребия выбирают семь человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что Дмитрий окажется одним из этих семи человек? Ваш ответ: \_\_\_\_\_.

5. Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,2. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что по истечении года в помещении останется хотя бы одна не перегоревшая лампа: \_\_\_\_\_.

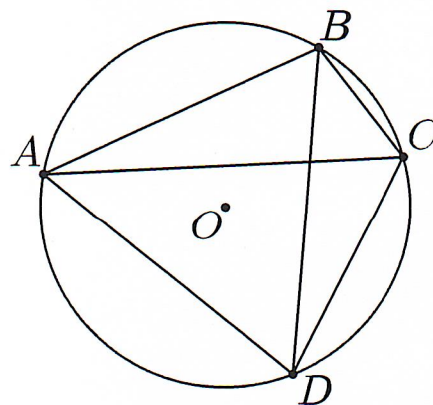


Рис. 1. К заданию 1.



6. Найдите корень уравнения  $4^{x-7} = \frac{1}{64}$ . Ваш ответ: \_\_\_\_\_.
7. Найдите значение выражения  $3 \cos 2\alpha$ , если  $\sin \alpha = 0,2$ . Ответ: \_\_\_\_\_.

8. На рисунке 2 изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f'(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ . Ваш ответ: \_\_\_\_\_.

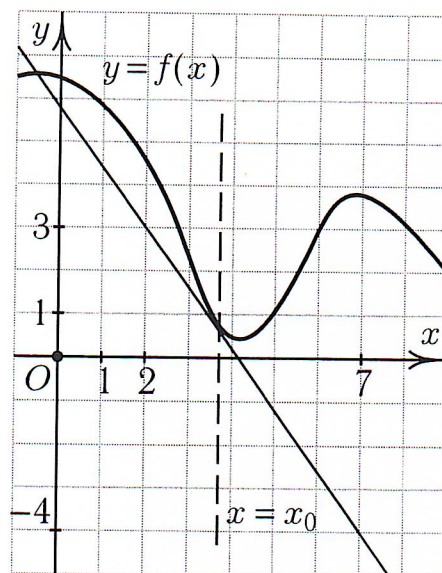


Рис. 2. К заданию 8.

9. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой  $\nu_0 = 295$  Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе второй такой же тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка  $\nu$  больше частоты первого: она зависит от скорости движения второго тепловоза  $v$  по закону  $\nu(v) = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c}}$ , где  $c \approx 300 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  — скорость звука. Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если их частоты отличаются не менее, чем на 5 Гц. Определите, с какой минимально возможной скоростью приближался к платформе второй тепловоз, если человек смог различить сигналы по тону. Ответ дайте в  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Ваш ответ: \_\_\_\_\_.
10. Смешав 45%-й и 97%-й водные растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62%-й водный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-го водного раствора той же кислоты, то получили бы 72%-й водный раствор кислоты. Сколько килограммов 45%-го водного раствора использовали для получения 62%-го водного раствора кислоты? Ваш ответ: \_\_\_\_\_.

11. На рис. 3 изображены графики функций вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$  и  $g(x) = kx$ , пересекающиеся в точках  $A$  и  $B$  (точка  $B$  на рисунке не видна). Найдите абсциссу точки  $B$ . Ваш ответ: \_\_\_\_\_.

12.  $x$  — независимая переменная.  $y$  — зависимая переменная, функция от  $x$ . Зависимость  $y(x)$  задана формулой:

$$y = -\frac{x}{x^2 + 256}.$$

Найдите значение переменной  $x$ , при котором функция  $y(x)$  принимает наименьшее значение. Ваш ответ: \_\_\_\_\_.

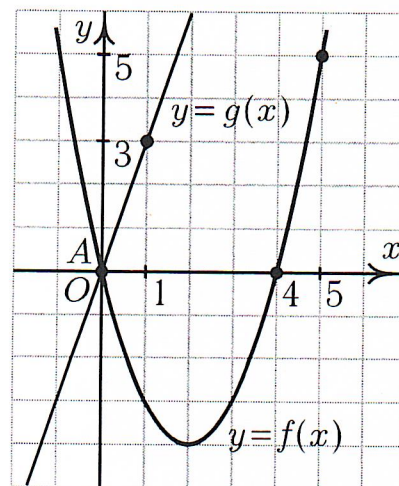


Рис. 3. К заданию 11.



Часть 2

13. Дано уравнение  $2 \sin^3 x = \sqrt{2} \cos^2 x + 2 \sin x$ .  
а) Решите это уравнение.  
б) Укажите те корни этого уравнения, которые принадлежат отрезку  $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$ .
14. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $MN$  и пересекает ребро  $BC$  в точке  $K$ .  
а) Докажите, что прямая  $MN$  перпендикулярна ребрам  $AB$  и  $CD$ .  
б) Найдите площадь сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $BK = 1$  см, а  $KC = 3$  см.
15. Решите неравенство  $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0$ .
16. В июле 2026 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия погашения долга таковы:
- каждый январь долг будет возрастать на  $r$  процентов по сравнению с долгом на конец предыдущего года ( $r$  — целое число);
  - в период с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
  - в июле 2027, 2028, 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
  - в июле 2031 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
  - в июле 2032, 2033, 2034, 2035 и 2036 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
  - к июлю 2036 года долг должен быть погашен полностью.
- Известно, что сумма всех платежей после полного погашения долга будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите  $r$ .
17. Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Известно, что  $AB = CD = 3$  см,  $BC = DE = 4$  см.  
а) Докажите, что  $AC = CE$ .  
б) Найдите длину диагонали  $BE$ , если  $AD = 6$  см.
18. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых записанная ниже система уравнений имеет ровно два различных решения. Система уравнений такова:

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3)\sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a. \end{cases}$$

19. Из пары натуральных чисел  $(a; b)$ , в которой  $a > b$ , за один ход получают пару  $(a + b; a - b)$ .
- а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(100; 1)$  пару, большее число в которой равно 400?
- б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(100; 1)$  пару  $(806; 788)$ ?
- в) Какое наименьшее  $a$  может быть в паре  $(a; b)$ , из которой за несколько ходов можно получить пару  $(806; 788)$ ?

**К р и т е р и и о ц е н и в а н и я.** Правильное выполнение каждого из заданий с 1-го по 12-е включительно оценивается в 1 балл. Задание считается выполненным правильно, если ответ записан в той форме, которая указана в формулировке задания, и полностью совпадает с эталоном ответа. Эталоны ответов представлены ниже.

Номер задания	Эталон ответа
1	61
2	29
3	1,125
4	0,35
5	0,992
6	4
7	2,76
8	-1,4
9	5
10	15
11	7
12	16

Количество баллов, начисляемых за выполнение заданий с 13-го по 19-е включительно, зависит от полноты решения и правильности ответа. Решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы записи решений и формы записи ответов могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, начисляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии описания решения оценивается в 0 баллов.

Проверяется только математическое содержание представленного решения, особенности записи решения не учитываются. При выполнении заданий могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



В результате выполнения 13-го задания может быть получено следующее решение.

а) Замена  $t = \sin x$  дает уравнение  $(t-1)(t+1)(t + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$ . Наличие у него корней  $t_1 = \sin x = -1$  и  $t_2 = \sin x = 1$  приводит к наличию у исходного уравнения первой серии корней  $x_n^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \pi n$  ( $n$  – целое число).

Наличие еще и корня  $t_3 = \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  приводит к тому, что у исходного уравнения в дополнение к первой имеются также вторая и третья серии корней:  $x_m^{(2)} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $x_k^{(3)} = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$  ( $m$  и  $k$  – целые числа).

б) Исследуем корни первой серии на предмет принадлежности к отрезку  $\sigma = [-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$ :  $-4\pi \leq x_n^{(1)} \leq -\frac{5\pi}{2}$ ,  $-4\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq -\frac{5\pi}{2}$ , поэтому  $-4,5 \leq n \leq -3$ ,  $n_1 = -4$ ,  $n_2 = -3$ ,  $x_{-4}^{(1)} = -\frac{7\pi}{2}$ ,  $x_{-3}^{(1)} = -\frac{5\pi}{2}$ . Следовательно, этому отрезку принадлежат корни первой серии  $-\frac{7\pi}{2}$  и  $-\frac{5\pi}{2}$ .

Исследуем теперь корни второй серии на предмет принадлежности к тому же отрезку:  $-4\pi \leq x_m^{(2)} \leq -\frac{5\pi}{2}$ ,  $-4\pi \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \leq -\frac{5\pi}{2}$ ,  $-2\frac{5}{8} \leq m \leq -1\frac{7}{8}$ ,  $m = -2$ ,  $x_{-2}^{(2)} = -\frac{11\pi}{4}$ . Итак, отрезку  $\sigma$  принадлежит корень второй серии  $-\frac{11\pi}{4}$ .

Наконец, на тот же предмет исследуем еще и корни третьей серии:  $-4\pi \leq x_k^{(3)} \leq -\frac{5\pi}{2}$ ,  $-4\pi \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2}$ ,  $-2\frac{7}{8} \leq k \leq -2\frac{1}{8}$ ,  $k \in \emptyset$ .

Ни один корень третьей серии не принадлежит отрезку  $\sigma$ .

Ответ: а) Корни уравнения имеются, они образуют следующие три серии:  $x_n^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $x_m^{(2)} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $x_k^{(3)} = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$  ( $n$ ,  $m$  и  $k$  – целые числа). б) Отрезку  $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$  принадлежат корни  $-\frac{7\pi}{2}$ ,  $-\frac{11\pi}{4}$  и  $-\frac{5\pi}{2}$ .

Максимальный балл – 2. За выполнение 13-го задания начисляется 2 балла, если обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах. Если обоснованно получен верный ответ только в пункте «а» – начисляется 1 балл. Если получены неверные ответы в обоих пунктах из-за вычислительных ошибок, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – начисляется 1 балл. Если решение не соответствует ни одному из критериев, указанных выше, – начисляется 0 баллов.

В результате выполнения 14-го задания может быть получено следующее решение.

а) В тексте решения используются величины, имеющие смысл геометрической длины. Их значения даются просто числами, без указания единиц измерения. Предполагается, что они измерены в сантиметрах.



Введем декартову систему координат, началом отсчета которой является точка  $O = B$  (рис. 4). Ось абсцисс сонаправлена с вектором  $BC$ . Ось ординат проходит в плоскости  $BCD$  и направлена так, что ордината точки  $D$  положительна. Ось аппликат перпендикулярна плоскости  $BCD$  и направлена так, что аппликата точки  $A$  положительна. Поскольку  $BK=1$  и  $KC=3$ ,  $BC=BK+KC=4$ . В указанной системе координат координаты всех вершин тетраэдра  $ABCD$  суть:

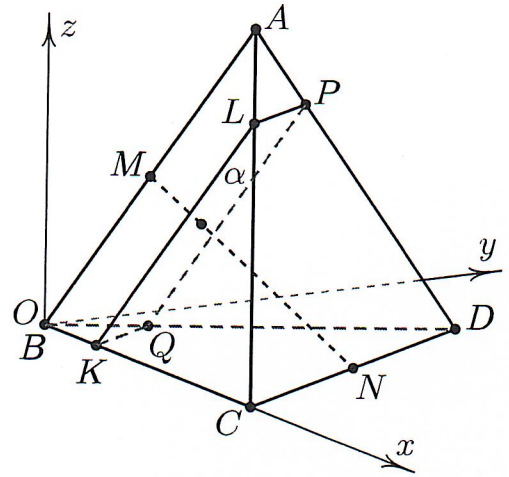


Рис. 4. К решению задания 14.

$A(2; \frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}), B(0;0;0), C(4;0;0),$

$D(2; \frac{6}{\sqrt{3}}; 0)$ . Координаты точек  $M$  и  $N$  находятся как координаты точек, являющихся серединами отрезков  $AB$  и  $CD$  соответственно:

$M(1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}), N(3; \frac{3}{\sqrt{3}}; 0)$ .

Вектор  $AB = (-2; -\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ , вектор  $MN = (2; \frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ , их скалярное произведение  $AB \cdot MN = -4 - \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = 0$ , значит векторы ортогональны, а прямая  $MN$  перпендикулярна ребру  $AB$ . Вектор  $CD = (-2; \frac{6}{\sqrt{3}}; 0)$ , скалярное произведение  $CD \cdot MN = -4 + 4 + 0 = 0$ , значит векторы  $CD$  и  $MN$  ортогональны, а прямая  $MN$  перпендикулярна ребру  $CD$ . Итак,  $MN \perp AB$  и  $MN \perp CD$ , что и требовалось доказать.

- б) Уравнение плоскости  $\alpha$  по точке  $K(1;0;0)$  и нормальному вектору  $MN$  таково:

$$\sqrt{3}x + y - \sqrt{2}z = \sqrt{3}. \quad (1)$$

Уравнения прямой  $BD$  по двум точкам  $B$  и  $D$ :

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x, \\ z = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим координаты точки  $Q$  как точки пересечения прямой  $BC$  с плоскостью  $\alpha$ :  $Q(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$ . Уравнения прямой  $AC$  по двум точкам  $A$  и  $C$ :

$$x - 2 = 2 - \sqrt{3}y = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{3}z}{2\sqrt{2}}. \quad (3)$$



Из (1) и (3) находим координаты точки  $L$  как точки пересечения прямой  $AC$  с плоскостью  $\alpha$ :  $L(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\sqrt{3})$ . Уравнения прямой  $AD$  по двум точкам  $A$  и  $D$ :

$$\begin{cases} x = 2, \\ z = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}y. \end{cases} \quad (4)$$

Из (1) и (4) находим координаты точки  $P$  как точки пересечения прямой  $AD$  с плоскостью  $\alpha$ :  $P(2; \sqrt{3}; \sqrt{2}\sqrt{3})$ .  $\mathbf{KL} = (\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\sqrt{3})$ ,  $\mathbf{QP} = (\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\sqrt{3})$ , а значит  $KL \parallel QP$  и  $KL = QP$ . Следовательно, четырехугольник  $KLPQ$ , являющийся сечением тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , есть параллелограмм. Вектор  $\mathbf{KQ} = (-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$ , а скалярное произведение  $\mathbf{KL} \cdot \mathbf{KQ} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ . Следовательно,  $KL \perp KQ$ , а параллелограмм  $KLPQ$  является прямоугольником. Вычислим его площадь  $S$ :  $S = |\mathbf{KL}| \cdot |\mathbf{KQ}| = 3 \cdot 1 = 3$  (см<sup>2</sup>).

Ответ: а) Доказано, что  $MN \perp AB$  и  $MN \perp CD$ . б) 3 см<sup>2</sup>.

В результате выполнения этого (как, впрочем, и любого другого) задания должно быть получено математически корректное и полное решение. Однако, оно не обязательно должно быть именно таким, как наше. В частности, обсуждаемое задание может быть выполнено и без использования в решении метода координат. Тогда решение может быть таким.

- а) Отрезок (рис. 5)  $BN$  — медиана грани  $BCD$ , а отрезок  $AN$  — медиана грани  $ACD$ . Поскольку тетраэдр  $ABCD$  является правильным, все его грани суть равные равносторонние треугольники. Следовательно, все их медианы равны. Значит  $AN = BN$ . Треугольник  $ANB$  — равнобедренный с основанием  $AB$  и боковыми сторонами  $AN$  и  $BN$ .  $MN$  — его медиана, проведенная к основанию, а значит  $MN$  есть высота треугольника  $ANB$ , проведенная к основанию  $AB$ . Поэтому  $MN \perp AB$ . Аналогичным обра-

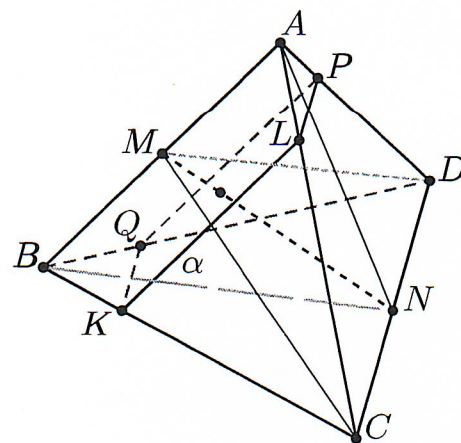


Рис. 5. К решению задания 14.

зом отрезок  $MN$  оказывается медианой, проведенной из вершины  $M$  равнобедренного треугольника  $CMD$  к его основанию  $CD$ . Поэтому  $MN$  — высота равнобедренного треугольника  $CMD$ , опущенная на его основание  $CD$ . Следовательно,  $MN \perp CD$ . Итак,  $MN \perp AB$  и также  $MN \perp CD$ , что и требовалось доказать.



- б) Пусть  $K$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $BC$ ,  $L$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $AC$ ,  $P$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $AD$  и  $Q$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $BD$ .

Прямая, перпендикулярная прямой, перпендикулярной плоскости, параллельна этой плоскости (если только она не есть прямая, принадлежащая этой плоскости).  $CD \perp MN$ , а  $MN \perp \alpha$ . Поэтому прямая  $CD$  не пересекается ни с одной прямой, принадлежащей плоскости  $\alpha$ . Прямая  $LP$  лежит в плоскости  $\alpha$  и потому не пересекается с прямой  $CD$ . Но прямые  $LP$  и  $CD$  лежат в одной плоскости — плоскости грани  $ACD$ . Две непересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, параллельны. Поэтому  $LP \parallel CD$ . Прямая  $KQ$  принадлежит плоскости  $\alpha$  и потому не пересекается с прямой  $CD$ . Но прямые  $KQ$  и  $CD$  принадлежат одной плоскости — плоскости грани  $BCD$ . Поэтому  $KQ \parallel CD$ . Две прямые, каждая из которых параллельна третьей, параллельны. Поэтому  $KQ \parallel LP$ . Если аналогично рассмотреть прямую  $KL$  (она принадлежит плоскости  $\alpha$  и грани  $CBA$ , она не пересекается с  $AB \perp MN$ , а  $MN \perp \alpha$ ) и прямую  $QP$  (она принадлежит плоскости  $\alpha$  и грани  $ABD$ , она не пересекается с  $AB$ ), то можно заключить, что  $QP \parallel AB$ ,  $KL \parallel AB$  и  $QP \parallel KL$ .

Противолежащие стороны четырехугольника  $KQPL$  параллельны, следовательно, этот четырехугольник является параллелограммом. Ребра  $AB$  и  $CD$  (как ребра правильного тетраэдра, не имеющие общих точек) лежат на непересекающихся прямых, скрещивающихся под прямым углом. Поэтому каждая прямая в плоскости  $\alpha$ , параллельная прямой  $AB$ , перпендикулярна любой прямой в плоскости  $\alpha$ , параллельной прямой  $CD$ . В частности, прямые  $KQ$  и  $LP$ , обе параллельные  $CD$ , перпендикулярны прямым  $QP$  и  $KL$ , которые обе параллельны  $AB$ . Следовательно, параллелограмм  $KQPL$  является прямоугольником.

$KQ \parallel CD$ , значит треугольники  $BKQ$  и  $BCD$  подобны. Следовательно, треугольник  $BKQ$  — равносторонний, а значит  $KQ = BK = 1$ .  $KL \parallel AB$ , значит треугольники  $CBA$  и  $CKL$  подобны. Следовательно, треугольник  $CKL$  — равносторонний, а значит  $KL = KC = 3$ . Тогда площадь  $S$  прямоугольника  $KQPL$ , являющегося сечением тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , может быть вычислена так:  $S = KQ \cdot KL = 1 \cdot 3 = 3$  (см<sup>2</sup>).

Ответ: а) Доказано, что  $MN \perp AB$  и  $MN \perp CD$ . б) 3 см<sup>2</sup>.

Максимальный балл — 3. За выполнение 14-го задания начисляется 3 балла, если приведено верное доказательство утверждения пункта «а» и обоснованно получен верный ответ в пункте «б». Если обоснованно получен верный ответ в пункте «б», но не приведено верное доказательство утверждения пункта «а», начисляется 2 балла. Если имеется верное доказательство утверждения пункта «а»,



но при обоснованном решении пункта «б» получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, начисляется 2 балла. Если имеется только верное доказательство утверждения пункта «а», начисляется 1 балл. Если нет верного доказательства пункта «а», а при обоснованном решении пункта «б» получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, начисляется 1 балл. Если обоснованно получен верный ответ в пункте «б» с использованием утверждения пункта «а», но верное доказательство утверждения пункта «а» не приведено, начисляется 1 балл. Если решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше, – начисляется 0 баллов.

В результате выполнения 15-го задания может быть получено следующее решение.

Для удобства рассуждений введем обозначения  $f(x) = \log_2(2-x)$ ,  $g(x) = \log_2(x+1)$ ,  $h(x) = f(x) - g(x)$ ,  $p(x) = \log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1 = (\log_2 x^2 + 1)^2$ . Тогда предложенное для решения неравенство можно записывать как  $\frac{h(x)}{p(x)} \geq 0$  или как  $\frac{f(x) - g(x)}{p(x)} \geq 0$ . Найдем область допустимых значений переменной  $x$ .

$f(x)$  имеет смысл лишь при  $2-x > 0$ , что равносильно  $x < 2$ .  $g(x)$  имеет смысл лишь при  $x+1 > 0$ , что равносильно  $x > -1$ . Следовательно,  $h(x)$  имеет смысл лишь при  $x \in (-1; 2)$ .  $p(x)$  имеет смысл лишь при  $x \neq 0$  и обращается в нуль при  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,71$ . Поэтому  $\frac{h(x)}{p(x)}$  в частности и предложенное для решения неравенство в целом имеют смысл лишь при  $x \in (-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0) \cup (0; \frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}; 2)$ .

Заметим, что  $p(x) > 0$  при всех допустимых значениях  $x$ . Следовательно, предложенное для решения неравенство при всех допустимых значениях  $x$  равносильно  $h(x) \geq 0$ . Тогда имеем:  $\log_2(2-x) - \log_2(x+1) \geq 0$ ,  $\log_2(x+1) \leq \log_2(2-x)$ ,  $x+1 \leq 2-x$ ,  $2x \leq 1$ ,  $x \leq \frac{1}{2}$ . Находя пересечение этого множества значений переменной  $x$  с указанным выше множеством ее допустимых значений, получаем решение предложенного неравенства:  $x \in (-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0) \cup (0; \frac{1}{2}]$ .

Ответ:  $(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0) \cup (0; \frac{1}{2}]$ .

Максимальный балл – 2. За выполнение 15-го задания начисляется 2 балла, если обоснованно получен верный ответ. Если обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки  $\frac{1}{2}$ , начисляется 1 балл. Если получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения, начисляется 1 балл. Если решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше, – начисляется 0 баллов.



В результате выполнения 16-го задания может быть получено следующее решение.

В тексте решения используются величины, имеющие смысл объемов денежных сумм. Их значения даются просто числами, без указания единиц измерения. Предполагается, что они измерены в тысячах рублей.

В июле 2031-го года (то есть через 5 лет после получения кредита) долг должен быть равен  $200 \cdot \frac{800 - 200}{5} = 120$  — на такую одну и ту же величину долг должен уменьшаться в июле 2027-го, 2028-го, 2029-го, 2030-го и 2031-го годов. В июле 2036-го года (через 5 лет после июля 2031-го года) долг должен быть выплачен полностью.  $\frac{200 - 0}{5} = 40$  — на такую другую одну и ту же величину долг должен уменьшаться в июле 2032-го, 2033-го, 2034-го, 2035-го и 2036-го годов. Следовательно, убывающая последовательность значений долга по состоянию на июль для годов с 2026-го по 2036-й включительно должна быть такой:

$$800, 680, 560, 440, 320, 200, 160, 120, 80, 40, 0.$$

Пусть  $k = 1 + \frac{r}{100}$ . Тогда убывающая последовательность значений долга по состоянию на январь для годов с 2027-го по 2036-й включительно будет такой:

$$800k, 680k, 560k, 440k, 320k, 200k, 160k, 120k, 80k, 40k.$$

Тогда последовательность величин платежей, внесенных в период с февраля по июнь каждого из годов с 2027-го по 2036-й включительно, будет такой:

$$800k - 680, 680k - 560, 560k - 440, 440k - 320, 320k - 200, \\ 200k - 160, 160k - 120, 120k - 80, 80k - 40, 40k - 0.$$

Первые пять членов последовательности платежей образуют арифметическую прогрессию, сумма всех пяти членов которой равна среднему (третьему с начала) члену, умноженному на 5. Последние пять членов также образуют арифметическую прогрессию, сумма всех пяти членов которой равна среднему (третьему с конца) члену, умноженному на 5. Сумма всех десяти членов последовательности платежей должна быть равна 1480. Составим и решим уравнение:

$$5(560k - 440) + 5(120k - 80) = 1480, \\ 680k = 816, \\ k = 1,2.$$

Поэтому  $1,2 = 1 + \frac{20}{100} = 1 + \frac{r}{100}$ . Отсюда имеем:  $r = 20$ .  
Ответ: 20.

Максимальный балл – 2. За выполнение 16-го задания начисляется 2 балла, если обоснованно получен верный ответ. Если верно построена математическая



модель, но верный ответ не получен, начисляется 1 балл. Если решение не соответствует ни одному из указанных критериев, – начисляется 0 баллов.

В результате выполнения 17-го задания может быть получено следующее решение.

Прежде, чем приступать к решению задачи, докажем лемму 1, утверждение которой в решении будет использовано дважды. Объектом, важное свойство которого устанавливает лемма 1, является плоский выпуклый четырехугольник (рис. 6), диагонали которого равны и две стороны, не имеющие общих точек, также равны. Две оставшиеся стороны не равны. Нужно доказать, что такой четырехугольник является равнобокой трапецией. Ее две равные стороны, не имеющие общих точек, являются боковыми сторонами, а две оставшиеся стороны – основаниями.

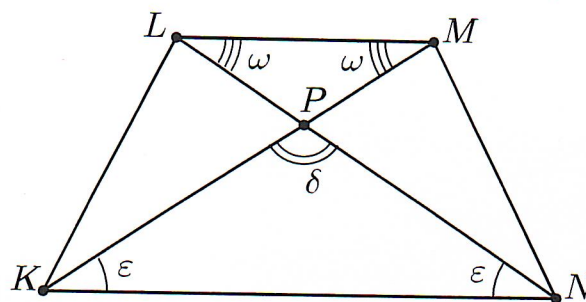


Рис. 6. К решению задания 17.

**Лемма 1.**  $KLMN$  – плоский выпуклый четырехугольник.  $KL = NM$ .  $KM = NL$ .  $LM \neq KN$ . Тогда  $KLMN$  – равнобокая трапеция с основаниями  $KN$ ,  $LM$  и боковыми сторонами  $KL$ ,  $NM$ .

**Доказательство.**  $\triangle KLN = \triangle NMK$  по трем сторонам:  $KL = NM$ ,  $KN = NK$ ,  $LN = MK$ . Следовательно,  $\angle LNK = \angle MKN = \varepsilon$ .  $\triangle KPN$  – равнобедренный (поскольку углы при его основании  $KN$  равны), следовательно  $\varepsilon = \frac{\pi - \delta}{2}$ , где  $\pi$  – величина развернутого угла, а  $\delta$  – величина угла  $KPN$ .  $\triangle LMK = \triangle MLN$  по трем сторонам:  $LM = ML$ ,  $MK = LN$ ,  $LK = MN$ . Следовательно,  $\angle NLM = \angle KML = \omega$ .  $\triangle LPM$  – равнобедренный (поскольку углы при его основании  $LM$  равны), следовательно  $\omega = \frac{\pi - \angle LPM}{2}$ .  $\angle LPM = \angle KPN$  (они вертикальны). Значит  $\angle LPM = \delta$ , откуда следует, что  $\omega = \frac{\pi - \delta}{2}$ . Сравнивая выражения для  $\varepsilon$  и  $\omega$ , заключаем, что  $\varepsilon = \omega$ . Следовательно,  $\angle MKN = \angle KML$ .

При прямых  $LM$ ,  $KN$  и секущей  $KM$  внутренние накрест лежащие углы  $MKN$  и  $KML$  равны, значит  $LM \parallel KN$ . Если бы прямая  $KL$  была параллельна прямой  $NM$ , четырехугольник  $KLMN$  был бы параллелограммом и было бы справедливо равенство  $LM = KN$ . Однако,  $LM \neq KN$ . Следовательно, прямые  $KL$  и  $NM$  не параллельны, а четырехугольник  $KLMN$  является равнобокой трапецией с основаниями  $KN \parallel LM$  и боковыми сторонами  $KL = NM$ , что и нужно было доказать.

Далее в тексте решения упоминаются величины, имеющие смысл геометрической длины. Их значения даются просто числами, без указания единиц измерения. Предполагается, что все такие величины измерены в сантиметрах.



- а) Величины центральных углов окружности равны тогда и только тогда, когда равны длины хорд, стягивающих стороны каждого из этих центральных углов.

Пусть  $O$  — центр окружности, в которую (рис. 7) вписан пятиугольник  $ABCDE$ . Величину центрального угла  $AOB$  обозначим  $\alpha$ . Тогда  $\angle AOB = \angle COD = \alpha$  (поскольку  $AB = CD = 3$ ). Величину центрального угла  $BOC$  обозначим  $\beta$ . Тогда  $\angle BOC = \angle DOE = \beta$  (поскольку  $BC = DE = 4$ ). Хорда  $AC$  стягивает стороны центрального угла  $AOC$ , величина которого равна  $\alpha + \beta$ . Хорда  $CE$  стягивает стороны центрального угла  $COE$ , величина которого равна  $\alpha + \beta$ . Поскольку хорды  $AC$  и  $CE$  стягивают стороны равных по величине центральных углов,  $AC = CE$ , что и требовалось доказать. Отметим также (это будет использовано далее), что хорда  $DB$  стягивает стороны центрального угла  $DOB$ , величина которого равна  $\alpha + \beta$ , следовательно,  $DB = AC = CE$ .

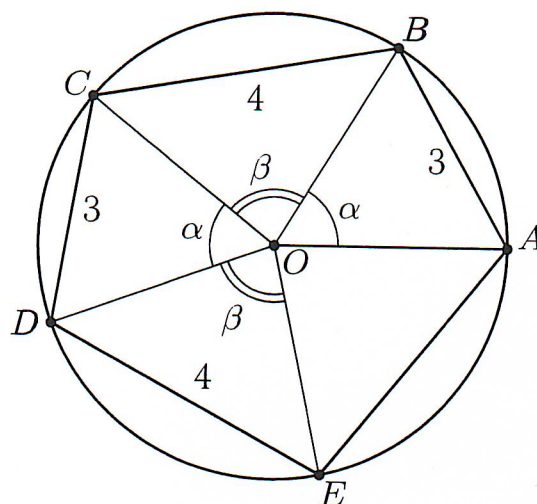


Рис. 7. К решению задания 17.

- б) Плоский выпуклый четырехугольник  $ABCD$  (рис. 8) согласно лемме 1 является равнобокой трапецией с основаниями  $AD \parallel BC$  и боковыми сторонами  $AB = DC = 3$ , что следует из справедливости следующих утверждений:  $DB = AC$  (доказано выше),  $AB = CD$  (по условию задачи) и  $CB \neq DA$  (по условию задачи). Углы при основании  $AD$  равны:  $\angle DAB = \angle ADC = \varphi$ .

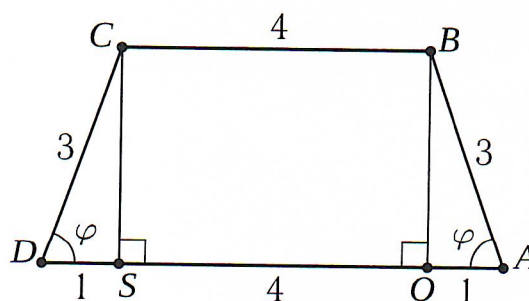


Рис. 8. К решению задания 17.

Опустим из вершин  $C$  и  $B$  перпендикуляры  $CS$  и  $BQ$  на основание  $AD$ . Ясно, что  $CS \parallel BQ$ .  $\triangle SDC = \triangle QAB$  по стороне и двум прилежащим к ней углам:  $DC = AB$ ,  $\angle SDC = \angle QAB = \varphi$ ,  $\angle SCD = \angle QBA = \frac{\pi}{2} - \varphi$ . Следовательно,  $DS = AQ$ . Плоский выпуклый четырехугольник  $SCBQ$  является параллелограммом ( $SQ \subset AD \parallel BC$ ,  $CS \parallel BQ$ ). Следовательно,  $SQ = CB = 4$ , а  $DS = AQ = \frac{AD - SQ}{2} = \frac{6 - 4}{2} = 1$ . В прямоугольном треугольнике  $AQB$  ( $\angle AQB$  — прямой) катет  $AQ = 1$  является прилежащим к углу  $QAB$ , а сторона  $AB = 3$  является гипотенузой. Следовательно,  $\cos \angle QAB = \frac{AQ}{AB} = \cos \varphi = \frac{1}{3}$ .



Плоский выпуклый четырехугольник  $EDCB$  (рис. 9) согласно лемме 1 является равнобокой трапецией с основаниями  $EB \parallel DC$  и боковыми сторонами  $ED = BC = 4$ , что следует из справедливости следующих утверждений:  $CE = DB$  (доказано выше),  $ED = BC$  (по условию задачи) и  $DC \neq EB$ . Углы при основании  $EB$  равны:  $\angle EBC = \angle BED$ .

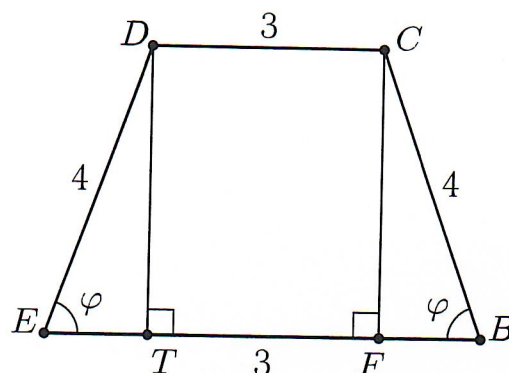


Рис. 9. К решению задания 17.

Острые углы, вписанные в окружность, опирающиеся на одну и ту же хорду или на различные хорды одинаковой длины, имеют одинаковую величину.  $\angle DAB$  — острый, так как он — угол при большем основании равнобокой трапеции  $ABCD$ .  $\angle EBC$  — острый, так как он есть угол при большем основании равнобокой трапеции  $EDCB$ .  $\angle DAB$  вписан в окружность и опирается на хорду  $DB$ .  $\angle EBC$  вписан в окружность и опирается на хорду  $CE$ .  $DB = CE$  (доказано выше). Следовательно,  $\angle EBC = \angle DAB = \angle QAB = \varphi$ .

Опустим из вершин  $D$  и  $C$  равнобокой трапеции  $EDCB$  перпендикуляры  $DT$  и  $CF$  на основание  $EB$ . Аналогично тому, как это было сделано выше для трапеции  $ABCD$ , можно доказать, что  $ET = BF = x$ , а  $TF = 3$ . В прямоугольном треугольнике  $BFC$  ( $\angle BFC$  — прямой)  $\cos \angle FBC = \cos \angle EBC = \cos \varphi = \frac{1}{3} = \frac{x}{4}$ . Тогда  $x = \frac{4}{3}$ . Поэтому  $BE = 2 \cdot \frac{4}{3} + 3 = \frac{17}{3}$  (см).

Ответ: а) Доказано, что  $AC = CE$ . б)  $\frac{17}{3}$  см.

Максимальный балл — 3. За выполнение 17-го задания начисляется 3 балла, если имеется верное доказательство утверждения пункта «а» и обоснованно получен верный ответ в пункте «б». Если обоснованно получен верный ответ в пункте «б», но не приведено верное доказательство утверждения пункта «а», за выполнение 17-го задания начисляется 2 балла. Если имеется верное доказательство утверждения пункта «а», но при обоснованном решении пункта «б» получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, за выполнение 17-го задания начисляется 2 балла. Если имеется только верное доказательство утверждения пункта «а», за выполнение 17-го задания начисляется 1 балл. Если нет верного доказательства утверждения пункта «а», а при обоснованном решении пункта «б» получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, за выполнение 17-го задания начисляется 1 балл. Если нет верного доказательства утверждения пункта «а», а верный ответ в пункте «б» получен обоснованно с использованием утверждения пункта «а», за выполнение 17-го задания начисляется 1 балл. Если решение не соответствует ни одному из указанных критериев, за выполнение 17-го задания начисляется 0 баллов.



В результате выполнения 18-го задания может быть получено следующее решение.

Предложенная для исследования система уравнений не имеет смысла, когда подкоренное выражение в первом уравнении отрицательно. В противном случае система имеет смысл. Иными словами, исследуемая система уравнений имеет смысл лишь при  $x - y + 3 \geq 0$ , что равносильно  $y \leq x + 3$ . Обозначим множество допустимых значений компонент упорядоченных пар  $(x; y)$  буквой  $\Omega$ , тогда  $\Omega = \{(x; y) | y \leq x + 3\}$ .

На рис. 10 изображена координатная плоскость.  $O$  — начало отсчета,  $Ox$  — ось абсцисс,  $Oy$  — ось ординат. На рисунок нанесена координатная сетка. Сторона масштабного квадрата (одной ячейки координатной сетки) равна 1. Множеству  $\Omega$  соответствуют точки, принадлежащие прямой  $AB$ , проходящей через точки  $A(0; 3)$  и  $B(6; 9)$ , а также точки, лежащие ниже прямой  $AB$ . Всем точкам, принадлежащим прямой  $AB$ , соответствуют значения переменных  $x$  и  $y$ , обращающие в нуль значение выражения  $x - y + 3$ , а значит — удовлетворяющие первому уравнению исследуемой системы.

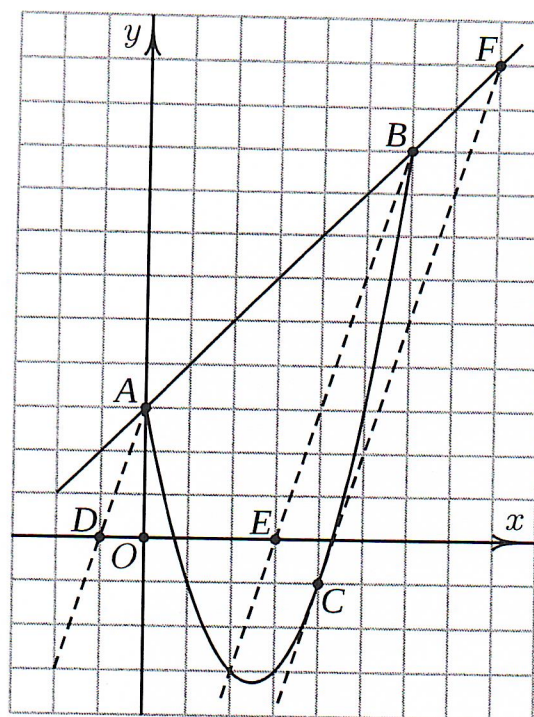


Рис. 10. К решению задания 18.

Не выше прямой  $AB$  расположена часть параболы  $y = x^2 - 5x + 3$ . Всем точкам указанной части параболы соответствуют значения переменных  $x$  и  $y$ , обращающие в нуль значение выражения  $x^2 - 5x - y + 3$ , и, следовательно, также удовлетворяющие первому уравнению исследуемой системы. Других (кроме указанных) значений переменных  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих первому уравнению исследуемой системы и составляющих пары, принадлежащие множеству  $\Omega$ , нет. Обозначим буквой  $\Phi$  следующее множество:  $\Phi = \{(x; y) | (x; y) \in \Omega \text{ и } (x^2 - 5x - y + 3 = 0 \text{ или } x - y + 3 = 0)\}$ . Его элементы (и только они) имеют значения компонент  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие первому уравнению исследуемой системы и сохраняющие за системой смысл. На координатной плоскости геометрическим местом точек, соответствующих элементам множества  $\Phi$ , является прямая  $AB$  и находящаяся не выше нее часть параболы  $y = x^2 - 5x + 3$ .

Прямая  $AD$  — это прямая семейства  $y = 3x + a$ , соответствующая значению параметра  $a = 3$ . При  $a \geq 3$  прямые указанного семейства проходят не ниже (или не правее) прямой  $AD$ , проходящей через точки  $A$  и  $D(-1; 0)$ . Поэтому каждая из указанных прямых имеет лишь одну об-



щую точку с геометрическим местом точек, соответствующих элементам множества  $\Phi$ . Соответствующие каждой из таких общих точек значения переменных  $x$  и  $y$  сохраняют смысл исследуемой системы и обращают в верные равенства оба уравнения этой системы. Следовательно, при  $a \geq 3$  исследуемая система имеет единственное решение.

Прямая  $BE$  — это прямая семейства  $y = 3x + a$ , соответствующая значению параметра  $a = -9$ . Она проходит параллельно прямой  $AD$  через точки  $B$  и  $E(3; 0)$ . При  $a \in [-9; 3)$  прямые указанного семейства проходят ниже (или правее) прямой  $AD$  и не ниже (или не правее) прямой  $BE$ . Поэтому каждая из указанных прямых имеет ровно две общие точки с геометрическим местом точек, соответствующих элементам множества  $\Phi$ . Каждая из таких общих точек соответствует решению исследуемой системы уравнений. Следовательно, при  $a \in [-9; 3)$  эта система имеет ровно два решения.

Точка  $C$  — это точка касания параболы  $y = x^2 - 5x + 3$  одной из прямых семейства  $y = 3x + a$ . Абсциссу точки  $C$  можно найти так:  $(x^2 - 5x + 3)' = 2x - 5 = 3 = (3x + a)'$ , откуда  $x = 4$ . Ордината точки  $C$  затем находится как значение выражения  $x^2 - 5x + 3$  при  $x = 4$ :  $y = -1$ . Подставив координаты точки  $C(4; -1)$  в уравнение  $y = 3x + a$ , получаем:  $-1 = 3 \cdot 4 + a$ , откуда  $a = -13$ .

Прямая  $CF$  — это прямая семейства  $y = 3x + a$ , соответствующая значению параметра  $a = -13$ . Она параллельна прямым  $AD$  и  $BE$  (все прямые указанного семейства параллельны). При  $a \in (-13; -9)$  прямые указанного семейства проходят ниже (правее) прямой  $BE$  и выше (левее) прямой  $CF$ . Каждая из указанных прямых имеет три общие точки с геометрическим местом точек, соответствующих элементам множества  $\Phi$ . Следовательно, при  $a \in (-13; -9)$  исследуемая система уравнений имеет три решения. При  $a < -13$  прямые семейства  $y = 3x + a$  проходят ниже (правее) прямой  $CF$ . Каждая такая прямая имеет одну общую точку с геометрическим местом точек, соответствующих элементам множества  $\Phi$ . Следовательно, при  $a < -13$  исследуемая система уравнений имеет одно решение. При  $a = -13$  прямая семейства  $y = 3x + a$  — это прямая  $CF$ . Она имеет ровно две общие точки с геометрическим местом точек, соответствующих элементам множества  $\Phi$ . Следовательно, при  $a = -13$  исследуемая система уравнений имеет ровно два решения.

Нами найдено количество решений предложенной для исследования системы уравнений при всех возможных действительных значениях параметра  $a$ . Ровно два различных решения система имеет при значениях  $a \in \{-13\} \cup \{a | -9 \leq a < 3\}$ .

Ответ:  $a \in \{-13\} \cup \{a | -9 \leq a < 3\}$ .

Максимальный балл — 4. За выполнение 18-го задания начисляется 4 балла, если обоснованно получен верный ответ. За выполнение 18-го задания начисляется 3 балла, если с помощью верного рассуждения получено множество значений



параметра  $a$ , отличающееся от верного только исключением (включением) точек  $a = -9$  и (или)  $a = 3$ . За выполнение 18-го задания начисляется 2 балла, если с помощью верного рассуждения получено множество значений  $a \in [-9; 3)$  (быть может, с неточностями при включении или исключении границ), а значение параметра  $a = -13$  утеряно. За выполнение 18-го задания начисляется 2 балла, если получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно подобраны все шаги решения. За выполнение 18-го задания начисляется 1 балл, если задача верно сведена к исследованию взаимного расположения части параболы и прямых (аналитически или графически). За выполнение 18-го задания начисляется 0 баллов, если решение не соответствует ни одному из критериев, указанных выше.

В результате выполнения 19-го задания может быть получено следующее решение.

Первую компоненту пары будем называть абсциссой пары. Значение абсциссы пары, полученной из исходной пары после совершения  $n$  ходов ( $n = 0, 1, 2, \dots$  — неотрицательное целое число), будем обозначать  $x_n$ . Вторую компоненту пары будем называть ординатой пары. Значение ординаты пары, полученной из исходной пары после совершения  $n$  ходов, будем обозначать  $y_n$ . Согласно условию задачи:

$$x_0 = a, \quad (1)$$

$$y_0 = b, \quad (2)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_n, \quad (3)$$

$$y_{n+1} = x_n - y_n. \quad (4)$$

Формулы (1)–(4) имеют рекуррентный характер. Нам же хотелось бы иметь формулы, позволяющие напрямую вычислять значения абсциссы и ординаты пары, полученной из исходной пары после совершения конкретного числа ходов, зная это число ходов. Пусть  $k = 0, 1, 2, \dots$  — неотрицательное целое число. Можно заметить, что:

$$x_{2k} = 2^k a, \quad (5)$$

$$y_{2k} = 2^k b, \quad (6)$$

$$x_{2k+1} = 2^k (a + b), \quad (7)$$

$$y_{2k+1} = 2^k (a - b). \quad (8)$$

Докажем, используя метод математической индукции, что формулы (5)–(8) являются верными.

База индукции. Пусть  $k = 0$ . Тогда  $x_0 = 2^0 a = a$ , что совпадает с (1). Формула (5) при  $k = 0$  верна.  $y_0 = 2^0 b = b$ , что совпадает с (2). Формула (6) при  $k = 0$  верна. По формуле (7) имеем:  $x_1 = 2^0 (a + b) = a + b$ , что совпадает с результатом, получаемым по формуле (3). Формула (7) при  $k = 0$  верна. По формуле (8) имеем:  $y_1 = 2^0 (a - b) = a - b$ , что совпадает с результатом, получаемым по формуле (4). Формула (8) при  $k = 0$  верна. База индукции надежна.



Гипотеза индукции. Пусть  $k=i$  ( $i$  – неотрицательное целое число). Будем считать, что при  $k=i$  формулы (5)–(8) верны. Иными словами, мы предполагаем, что при неотрицательном целом  $i$  верны формулы:

$$x_{2i} = 2^i a, \quad (9)$$

$$y_{2i} = 2^i b, \quad (10)$$

$$x_{2i+1} = 2^i(a+b), \quad (11)$$

$$y_{2i+1} = 2^i(a-b), \quad (12)$$

Шаг индукции. Пусть  $k=i+1$ . Тогда  $x_{2k} = x_{2(i+1)} = x_{(2i+1)+1} = \{\text{по формуле (3)}\} = x_{2i+1} + y_{2i+1} = \{\text{по формулам (3) и (4)}\} = x_{2i} + y_{2i} + x_{2i} - y_{2i} = 2x_{2i} = \{\text{по формуле (9), которая есть предположение о справедливости формулы (5) при } k=i\} = 2 \cdot 2^i a = 2^{i+1} a$ . Итак,  $x_{2(i+1)} = 2^{i+1} a$ . Это – вид формулы (5) при  $k=i+1$ . Из предположения о верности формулы (5) при  $k=i$  выведено утверждение о верности формулы (5) при  $k=i+1$ . Для формулы (5) шаг индукции совершен.

Пусть по-прежнему  $k=i+1$ . Тогда  $y_{2k} = y_{2(i+1)} = y_{(2i+1)+1} = \{\text{по формуле (4)}\} = x_{2i+1} - y_{2i+1} = \{\text{по формулам (3) и (4)}\} = x_{2i} + y_{2i} - x_{2i} + y_{2i} = 2y_{2i} = \{\text{по формуле (10), которая есть предположение о справедливости формулы (6) при } k=i\} = 2 \cdot 2^i b = 2^{i+1} b$ . Итак,  $y_{2(i+1)} = 2^{i+1} b$ . Это – вид формулы (6) при  $k=i+1$ . Из предположения о верности формулы (6) при  $k=i$  выведено утверждение о верности формулы (6) при  $k=i+1$ . Для формулы (6) шаг индукции совершен.

Пусть, как и выше,  $k=i+1$ . Тогда  $x_{2k+1} = x_{2(i+1)+1} = \{\text{по формуле (3)}\} = x_{2(i+1)} + y_{2(i+1)} = x_{(2i+1)+1} + y_{(2i+1)+1} = \{\text{по формулам (3) и (4)}\} = x_{2i+1} + y_{2i+1} + x_{2i+1} - y_{2i+1} = 2x_{2i+1} = \{\text{по формуле (11), которая есть предположение о справедливости формулы (7) при } k=i\} = 2 \cdot 2^i(a+b) = 2^{i+1}(a+b)$ . Итак,  $x_{2(i+1)+1} = 2^{i+1}(a+b)$ . Это – вид формулы (7) при  $k=i+1$ . Из предположения о верности формулы (7) при  $k=i$  выведено утверждение о верности формулы (7) при  $k=i+1$ . Для формулы (7) шаг индукции совершен.

Пусть все еще  $k=i+1$ . Тогда  $y_{2k+1} = y_{2(i+1)+1} = \{\text{по формуле (4)}\} = x_{2(i+1)} - y_{2(i+1)} = x_{(2i+1)+1} - y_{(2i+1)+1} = \{\text{по формулам (3) и (4)}\} = x_{2i+1} + y_{2i+1} - x_{2i+1} + y_{2i+1} = 2 \cdot y_{2i+1} = \{\text{по формуле (12), которая есть предположение о справедливости формулы (8) при } k=i\} = 2 \cdot 2^i(a-b) = 2^{i+1}(a-b)$ . Итак,  $y_{2(i+1)+1} = 2^{i+1}(a-b)$ . Это – вид формулы (8) при  $k=i+1$ . Из предположения о верности формулы (8) при  $k=i$  выведено утверждение о верности формулы (8) при  $k=i+1$ . Для формулы (8) шаг индукции совершен.

При надежной базе индукции, приняв гипотезу индукции, для всех формул (5)–(8) нам удалось успешно совершить шаг индукции. Верность формул (5)–(8) методом математической индукции доказана.

Исходную пару и все другие пары, полученные из исходной после совершения четного количества ходов, будем называть четными парами. Пары, полученные из исходной после совершения нечетного количества ходов, будем называть нечетными парами. Докажем, что все пары (как



четные, так и нечетные) обладают следующим свойством: абсцисса любой пары больше ее ординаты. В виде формулы это можно записать так:

$$x_n > y_n. \quad (13)$$

Для четных пар  $n=2k$ . По условию задачи  $a > b$ . Умножая обе части последнего неравенства на положительное число  $2^k$ , получаем  $2^k a > 2^k b$ , что в соответствии с формулами (5) и (6) с учетом того, что  $n=2k$ , равносильно неравенству  $x_n > y_n$ . Для четных пар формула (13) справедлива.

Для нечетных пар  $n=2k+1$ . По условию задачи  $b$  — натуральное число. Следовательно,  $b$  — положительное число. Тогда  $-b$  — отрицательное число. Поскольку любое положительное число больше любого отрицательного,  $b > -b$ . Прибавляя к обеим частям этого неравенства натуральное (согласно условию задачи) число  $a$  (которое сейчас могло бы быть вообще произвольным действительным числом), приходим к следующему неравенству:  $a+b > a-b$ . Умножая обе части последнего неравенства на положительное число  $2^k$ , имеем:  $2^k(a+b) > 2^k(a-b)$ , что в соответствии с формулами (7) и (8) с учетом того, что  $n=2k+1$ , равносильно неравенству  $x_n > y_n$ . Для нечетных пар формула (13) также справедлива, следовательно, она справедлива для любых пар.

Результат (13) может быть использован, в частности, следующим образом: употребленное в условии задачи (содержащее в себе загадку) выражение «большее число пары» будем однозначно и без сомнений считать имеющим значение «абсцисса пары».

а) При  $a=100$ ,  $b=1$  нужно найти хотя бы одно значение  $n > 0$ , при котором  $x_n=400$ , или доказать, что таких значений  $n$  не существует. Предположим, что  $n$  — четное ( $n=2k$ ). Используя формулу (5), составим и решим уравнение:  $x_n=x_{2k}=2^k \cdot 100=400$ ,  $2^k=4$ ,  $k=2$ . Тогда  $n=2 \cdot 2=4$ . Следовательно, за 4 хода из пары (100;1) можно получить пару с абсциссой, равной 400. Можем прямо убедиться в этом:  $(100;1) \rightarrow (101;99) \rightarrow (200;2) \rightarrow (202;198) \rightarrow (400;4)$ . Количество ходов равно количеству стрелок в последней записи. Это количество равно 4.

б) При  $a=100$ ,  $b=1$  нужно найти хотя бы одно значение  $n > 0$ , при котором  $x_n=806$  и  $y_n=788$ , или доказать, что таких значений  $n$  не существует.

Предположим, что  $n$  — четное ( $n=2k$ ). Используя формулу (5), составим и исследуем на предмет решения в целых неотрицательных числах уравнение:  $x_n=x_{2k}=2^k \cdot 100=806$ . Из последнего равенства следует, что натуральное число 100 является делителем натурального числа 806. Это неверно. Следовательно, уравнение решений в неотрицательных целых числах не имеет. Число  $n$  не может быть четным.

Предположим, что  $n$  — нечетное ( $n=2k+1$ ). Используя формулу (7), составим и рассмотрим на предмет решения в неотрицательных



целых числах уравнение:  $x_n = x_{2k+1} = 2^k(100+1) = 2^k \cdot 101 = 806$ . Из последнего равенства следует, что натуральное число 101 является делителем натурального числа 806. Это неверно. Следовательно, уравнение решений в неотрицательных целых числах не имеет. Число  $n$  не может быть нечетным.

Поскольку натуральное значение  $n$  не может быть ни четным, ни нечетным, оно не существует. Следовательно, пара  $(806; 788)$  не может быть получена из пары  $(100; 1)$  ни за какое количество ходов.

в) Установим, может ли пара  $(806; 788)$  при каких-нибудь натуральных  $a = x_0$  и  $b = y_0$  быть нечетной. В соответствии с формулой (7):  $x_n = x_{2k+1} = 2^k(a+b) = 806$ . Из чисел вида  $2^k$  (неотрицательных целых степеней двойки) делителями натурального числа 806 являются только 1 ( $k=0$ ) и 2 ( $k=1$ ). Исследуем каждый из указанных случаев отдельно.

Пусть  $k=0$ . Тогда по формуле (7)  $a+b=806$ , а по формуле (8)  $a-b=788$ . Совместно решив два последних уравнения, получаем:  $a=797$ ,  $b=9$ .

Пусть  $k=1$ . Тогда по формуле (7)  $2(a+b)=806$ , откуда  $a+b=403$ , а по формуле (8)  $2(a-b)=788$ , откуда  $a-b=394$ . Почленно сложив уравнения  $a+b=403$  и  $a-b=394$ , получаем следствие:  $2a=797$ . При натуральном  $a$  из последнего равенства следует, что 797 — четное число. Это не так. Следовательно, при  $k=1$  не существует подходящих значений  $a$  и  $b$ .

Итак, если пара  $(806; 788)$  является нечетной, то это возможно лишь при  $k=0$  ( $n=1$ ). За один ход пара  $(806; 788)$  получается из пары  $(797; 9)$ :  $(797; 9) \rightarrow (806; 788)$ .

Установим теперь, может ли пара  $(806; 788)$  при каких-нибудь  $a = x_0$  и  $b = y_0$  быть четной. По формуле (5)  $x_n = x_{2k} = 2^k a = 806$ . Из чисел вида  $2^k$  делителями числа 806, как уже отмечалось выше, являются только 1 ( $k=0$ ) и 2 ( $k=1$ ). Случай  $k=0$  ( $n=0$ ) неинтересен, так как в этом случае пара  $(806; 788)$  могла бы быть лишь исходной парой, а нас интересуют случаи, когда пара  $(806; 788)$  является не исходной, но производной.

Пусть  $k=1$ . Тогда по формуле (5)  $2a=806$ ,  $a=403$ , а по формуле (6)  $2b=788$ ,  $b=394$ .

Итак, если пара  $(806; 788)$  является четной, то это возможно лишь при  $k=1$  ( $n=2$ ). За два хода пара  $(806; 788)$  получается из пары  $(403; 394)$ :  $(403; 394) \rightarrow (797; 9) \rightarrow (806; 788)$ .

Констатируем следующее: существуют лишь две исходные пары, из которых за некоторое число ходов может быть получена пара  $(806; 788)$ . Это — пары  $(797; 9)$  и  $(403; 394)$ . Значение абсциссы второй из этих пар имеет наименьшее возможное значение  $a=403$ .

Ответ: а) Можно. б) Нельзя. в) 403.



Максимальный балл – 4. За выполнение 19-го задания начисляется 4 балла, если обоснованно получены верные ответы в пунктах «а», «б» и «в». За выполнение 19-го задания начисляется 3 балла, если обоснованно получен верный ответ в пункте «в» и обоснованно получен верный ответ или в пункте «а», или в пункте «б» (здесь употреблено исключаящее «или»). За выполнение 19-го задания начисляется 2 балла, если обоснованно получены верные ответы в пунктах «а» и «б» или обоснованно получен верный ответ в пункте «в» (снова употреблено исключаящее «или»). За выполнение 19-го задания начисляется 1 балл, если обоснованно получен верный ответ в пункте «а» или в пункте «б» (и здесь «или» является исключаящим). За выполнение 19-го задания начисляется 0 баллов, если решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Количество баллов за всю работу вычисляется как сумма баллов за все задания. Максимальное количество баллов, полученных за решение заданий, равно 32. Балльная оценка переводится в пятибалльную шкалу следующим образом:

- 0..17 баллов – неудовлетворительно;
- 18..23 баллов – удовлетворительно;
- 24..27 баллов – хорошо;
- 28..32 баллов – отлично.

## V. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ

При реализации программы обучающимся и преподавателю рекомендуется использовать информацию из источников приведенного ниже (не претендующего на полноту) списка:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. – URL: <https://fgos.ru/fgos/fgos-soo>.
2. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». Единый государственный экзамен. – URL: <https://fipi.ru/ege>.
3. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала математического анализа (10-11 кл.) / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. – М.: Просвещение, 2024. – 384 с.
4. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение, 1995. – 383 с.
5. Шабунин М. И. Математика: пособие для поступающих в вузы / М. И. Шабунин. – М.: Лаборатория знаний, 2016. – 744 с.
6. Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант». – URL: <http://www.kvant.info>.